

## Введение

В предыдущих методических указаниях мы рассматривали течения идеальной несжимаемой жидкости, ограничившись при этом (в соответствии с программой курса) только безвихревыми потоками. Теперь мы откажемся от допущения о несжимаемости и займемся изучением течений, для описания которых требуется более сложная модель, а именно, модель идеальной сжимаемой жидкости или, короче, модель идеального газа. Этот раздел механики сплошных сред еще называют газовой динамикой. Модель идеального газа предполагает, что скорость движения газа и ее изменение велики (что под этим понимается, мы покажем позднее), а пространственная протяженность относительно мала. Если в гидродинамике массовые силы (конкретно силы тяжести) занимали равноправное с другими силами положение, то в газовой динамике имеется возможность эти силы не учитывать, отбросив их в уравнениях. Действительно, абсолютное изменение давления  $|\Delta p|$  вследствие действия силы тяжести при перемещении по вертикали на  $|\Delta z|$

будет  $|\Delta p| = \rho g |\Delta z| = \frac{p}{RT} g |\Delta z|$  или  $\frac{|\Delta p|}{p} = \frac{g |\Delta z|}{RT}$ . Принимая значе-

ние  $T = 273\text{K}$  и рассматривая воздушную среду  $\left( R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right)$ , видим, что изменению гидростатического давления всего на 1 % отвечает смещение по высоте почти на 80 метров. Приведенная оценка помогает уяснить смысл слов "относительно малая пространственная протяженность".

Поскольку в новой модели плотность - величина переменная (и к тому же неизвестная), то выведенных ранее уравнений движения (уравнений Эйлера) и уравнения неразрывности теперь уже недостаточно. Требуется, как минимум, еще одно уравнение, а точнее, что будет ясно из дальнейшего, два уравнения. Одним из них должно быть, без сомнения, уравнение энергии, и для его составления неизбежно привлечение термодинамических соображений. Это в свою очередь приводит к появлению новой переменной - температуры - и к необходимости использования еще одного уравнения.

Таким замыкающим уравнением становится уравнение состояния газа. Итак, мы пришли к системе из шести уравнений (пяти дифференциальных уравнений в частных производных и одного алгебраического) для нахождения трех составляющих скорости, давления, плотности и температуры в зависимости от четырех переменных: трех пространственных координат и времени. Система дифференциальных уравнений квазилинейна, т.е. линейна относительно производных искомым функций и нелинейна относительно совокупности этих производных и самих функций. Изучение общих свойств решения таких систем и получение частных решений, соответствующих конкретным условиям движения газа, весьма сложная и еще далеко не завершенная математическая проблема. Мы остановимся в данном курсе только на стационарных и главным образом одномерных течениях, когда преимущественное изменение параметров в течении происходит по какой-то одной, вообще говоря, криволинейной координате, а изменениями по остальным направлениям можно пренебречь. Другими словами, мы будем изучать прежде всего течения в слабо изогнутых трубках тока и каналах с медленно меняющимся поперечным сечением, причем параметры потока будем считать постоянными в каждом поперечном сечении и меняющимися от сечения к сечению.

Несмотря на существенные упрощения, связанные с одномерной постановкой, при этом удается сохранить и продемонстрировать главные особенности сжимаемых течений, а также учесть и рассмотреть все виды воздействий на поток: подвод тепла, другого газа или жидкости, конденсацию, горение, трение и т.д. Конечно, полученные результаты будут приближенными, но они достигаются достаточно просто и в целом неплохо согласуются с экспериментом.

## 1. Уравнения одномерного стационарного течения

Рассмотрим трубку тока или канал, площадь сечения которых мало меняется, а ось имеет малую кривизну. Благодаря допущению об однородности уравнение неразрывности для установившегося течения теперь сводится к условию постоянства расхода в трубке тока (канале) в его простейшей форме:

$$\rho u A = \text{const.} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  и  $u$  - соответственно плотность газа и абсолютная скорость потока в произвольном сечении  $A$  канала.

Произведя логарифмическое дифференцирование (1.2), получим

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0. \quad (1.3)$$

Если взять выведенное ранее общее уравнение неразрывности, то мы увидим, что соотношение (1.2) из него не вытекает ни при каких условиях, кроме одного, когда  $A = \text{const}$ . Т.е. выражения (1.1) и (1.2) являются на самом деле приближенными, а использование какого-либо из них в качестве уравнения неразрывности есть своего рода плата за одномерную постановку неоднородной, строго говоря, задачи.

Второе уравнение - уравнение движения - может быть выписано сразу. Так как рассматриваемый канал предполагается слабо изогнутым (а это означает дополнительно, что центробежными силами можно пренебречь), то, взяв его ось за одну из координат, например  $x$ , и имея в виду, что по двум другим направлениям движения нет, мы, таким образом, из трех уравнений Эйлера должны оставить только первое

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

которое (в силу стационарного характера движения) представим следующим образом:

$$\rho u du = -dp. \quad (1.4)$$

В такой записи это уравнение часто называют дифференциальным уравнением Бернулли. Из него мы видим, что для ускорения потока всегда требуется уменьшать давление вниз по течению.

Уравнение энергии будем выводить, считая течение адиабатическим ( $dQ = 0$ ) и невязким. Выделим в некоторый момент времени  $t$  «жидкий» элементарный объём  $d\Omega$  ( $abcd$ ) протяженностью  $dx$  (рис. 1.1). К моменту  $t + \delta t$   $d\Omega$  переместится вдоль трубки тока (канала) в положение  $a'b'c'd'$ . Бла-

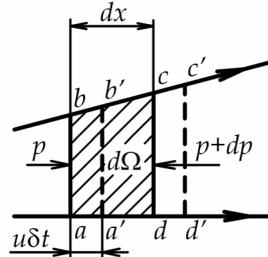


Рис. 1.1

годаря стационарному характеру течения, энергия объёма  $abcd$  остается одной и той же при перемещении  $d\Omega$  из первого положения  $abcd$  во второе  $a'b'c'd'$ . Следовательно, изменение полной энергии «жидкого» элемента  $d\Omega$  за время  $\delta t$  будет равно разности полных энергий объёмов  $dcc'd'$  и  $abb'a'$ :

$$\left\{ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) Au \delta t + d \left[ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) Au \right] \delta t \right\} - \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) Au \delta t =$$

$$= d \left[ \rho u A \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \right] \delta t = \rho u A d \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \delta t.$$

Это изменение энергии необходимо приравнять работе сил давления, приложенных к «жидкому» объёму  $d\Omega$  на его границе при смещении  $d\Omega$  за время  $\delta t$  из первого во второе положение:

$$pAu\delta t - [pAu + d(pAu)]\delta t = -d(pAu)\delta t.$$

Заметим при этом, что силы давления, действующие на боковую поверхность  $d\Omega$ , работы не совершают, так как они направлены по нормали к местной скорости движущейся среды.

Итак,

$$\rho u A d \left( e + \frac{u^2}{2} \right) = -d(pAu),$$

и после деления на  $\rho u A = \text{const}$  имеем

$$d \left( e + \frac{p}{\rho} \right) + u du = 0.$$

Вспомним, что сумма  $e + \frac{p}{\rho} = i$  есть термодинамическая функция состояния, называемая энтальпией или теплосодержанием. Следовательно, в стационарном теплоизолированном невязком потоке

$$di + u du = d \left( i + \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (1.5)$$

или

$$i + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (1.6)$$

О смысле постоянной в этом уравнении поговорим несколько позже.

Если газ совершенный, т.е. подчиняющийся уравнению состояния в форме Клапейрона-Менделеева  $p = \rho RT$ , то в курсе термодинамики доказывается, что его удельная внутренняя энергия и энтальпия являются функциями только температуры. Поэтому  $de = c_v dT$ ,  $di = c_p dT$ ,  $c_p = c_v + R$ , и, значит, из (1.4) следует, что

$$c_p dT + u du = 0. \quad (1.7)$$

Если газ к тому же еще и калорически совершенный (при этом  $c_v = \text{const}$  и  $c_p = \text{const}$ ), то интегральная форма (1.5) уравнения энергии принимает особенно простой вид:

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (1.8)$$

Большинство реальных газов при умеренных условиях (давлении и температуре) можно с хорошей точностью считать калорически совершенными<sup>1)</sup>. В дальнейшем, если не оговорены иные условия, мы будем рассматривать течения только таких газов.

В уравнениях (1.5) и (1.7) член  $\frac{u^2}{2}$  представляет собой кинетическую энергию упорядоченного движения, а температура  $T$  пропорциональна кинетической энергии беспорядочного движения молекул. Таким образом, уравнение  $c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{const}$  попросту выражает собой условие взаимного превращения кинетической энергии установившегося движения газа и энергии хаотического, случайного движения его молекул. Отсюда заключаем, что при полном адиабатическом торможении потока ( $u = 0$ ) энтальпия достигает своего максимального значения  $i_0 = c_p T_0$ , в соответствии с этим выражения (1.5) и (1.7) можно представить, как

---

<sup>1)</sup> При этом согласно классической кинетической теории  $c_v = \left(\frac{N}{2}\right)R$ ,  $c_p = \left(\frac{N}{2} + 1\right)R$ , где  $N$  - число степеней свободы «жесткой» молекулы.

$$i + \frac{u^2}{2} = i_0; \quad c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0. \quad (1.9)$$

Здесь  $i_0$  и  $T_0$  - соответственно энтальпия и температура адиабатического (это слово нередко опускают) торможения газа.

С другой стороны, при полном переходе энергии беспорядочного движения молекул в кинетическую энергию потока, т.е. при  $i = 0$  ( $T = 0$ ) последняя (а вместе с нею и скорость течения) становится наибольшей (но, заметим, вполне конечной), и, таким образом, константа справа в (1.5) и (1.7) запишется теперь иначе:

$$i + \frac{u^2}{2} = i_0 = \frac{u_{max}^2}{2}; \quad c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0 = \frac{u_{max}^2}{2}, \quad (1.10)$$

Откуда

$$u_{max} = \sqrt{2i_0} = \sqrt{2c_p T_0}. \quad (1.11)$$

Хотя максимальная скорость течения  $u_{max}$  достижима только теоретически (поскольку с приближением к абсолютному нулю температуры все газы рано или поздно переходят в конденсированное состояние), эта величина тем не менее не столь абстрактна, как может показаться. При некоторых условиях в реальных течениях скорость газа оказывается достаточно близкой к  $u_{max}$ . Например, в выхлопных струях ракетных двигателей на больших высотах благодаря высокой температуре в камере сгорания ( $T_0 \approx 3500\text{K} \div 4000\text{K}$ ) поток движется со скоростями, незначительно ( $\approx 1 \div 2\%$ ) уступающими  $u_{max}$ .

Обсудим вопрос о влиянии трения на уравнение энергии. Если работу, производимую жидкой частицей по преодолению трения обозначить  $dW_{тр}$ , то работа воздействия на частицу будет  $-dW_{тр}$ . Работа  $dW_{тр}$  в основном превращается в тепло  $dQ_{тр}$ , которое в условиях адиабатичности полностью воспринимается той же частицей, а весьма малая оставшаяся часть работы переходит в кинетическую энергию частицы  $l$ . При отсутствии специальных оговорок принято считать, что работа трения в одномерных течениях полностью превращается в тепло трения. В таком случае в правую часть уравнения (1.4) добавляются два равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку и поэтому взаимно уничтожающихся члена. Тем самым уравнение энергии сохраняет

свою форму независимо от наличия или отсутствия трения. Сохраняют свою силу и последующие выкладки.

## 2. Изменение энтропии в адиабатическом газовом потоке. Механическая форма уравнения энергии

Сведем в систему полученные нами дифференциальные уравнения неразрывности, движения и энергии:

$$\begin{cases} \frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0; & (2.1) \\ \rho u du = -dp; & (2.2) \\ di + u du = 0. & (2.3) \end{cases}$$

Можно утверждать, что данная система (вместе с уравнением состояния) описывает установившиеся одномерные адиабатические течения идеального газа при отсутствии в таких потоках сечений, в которых параметры газа испытывают разрыв. В этом последнем случае уравнения (2.1) и (2.3) "работают" до и после разрыва, а переход через него должен рассматриваться отдельно на основе интегральных законов сохранения.

Исключим из (2.2) и (2.3)  $u du$ . Характерное термодинамическое соотношение

$$di - \frac{dp}{\rho} = 0, \quad (2.4)$$

которое вытекает в результате такой операции, означает, что рассматриваемое течение является изоэнтропическим. Действительно,

имея в виду, что  $\frac{1}{\rho} = v$  есть удельный объем, равенство (2.4) можно

переписать в более привычной форме

$$di - v dp = di - d(pv) + p dv = de + p dv = T ds = 0. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что  $ds = 0$  или  $s = \text{const}$ .

Итак, в адиабатическом потоке идеального газа удельная энтропия  $s$  остается постоянной.

Если же течение вязкое, то уравнение движения (2.2) несколько изменяется: справа добавляется "вязкий" член, который всегда отрицателен. Вследствие этого получаем  $ds > 0$ , т.е. увеличение энтропии вниз по потоку.

Под механической формой уравнения энергии понимают такую, в которую не входит температура газа, а скорость связана с давлением и плотностью.

Обратимся вновь к калорически совершенному газу. Как мы уже знаем, при этом справедливо уравнение состояния в виде  $p = \rho RT$ , кроме того,  $c_p = \text{const}$  и  $c_v = \text{const}$ . Заменяя в (1.6)  $c_p$  на  $\frac{\kappa}{\kappa-1}R$ , где  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ , и затем  $RdT = d(RT)$  на  $d\left(\frac{p}{\rho}\right)$ , приходим

к дифференциальному уравнению энергии в механической форме

$$udu + \frac{\kappa}{\kappa-1}d\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0, \quad (2.6)$$

которое легко интегрируется:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (2.7)$$

Здесь  $p_0$ ,  $\rho_0$  - соответственно давление и плотность в условиях полного адиабатического торможения. Уравнения (2.6) и (2.7) применимы как при отсутствии, так и при наличии трения в потоке. Однако, если газ идеальный, то, согласно доказанному, состояние каждой жидкой частицы меняется изоэнтропическим образом и описывается уравнением адиабаты Пуассона:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (2.8)$$

Его несложно вывести из (2.5) с применением уравнения состояния.

С учетом (2.8) уравнения (2.6) и (2.7) переходят соответственно в

$$udu + \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{dp}{\rho_0} = 0 \quad (2.9)$$

и

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) называют уравнением Бернулли для сжимаемой жидкости. Оно может быть получено, минуя уравнение энергии, из дифференциального уравнения Бернулли (2.2), которое, кстати,

после подстановки в него значения  $\rho$  из (2.8) совпадет с (2.9). Последнее же есть разновидность уравнения энергии. Надо сказать, что если характер баротропности известен, т.е. задана функция  $\rho = f(p)$ , то уравнение движения интегрируется, давая уже известный нам из главы 2 для более общего случая интеграл Бернулли. Складывается впечатление, что уравнение энергии становится как бы лишним: вместо него используется условие баротропности. На самом деле ситуация такова: в форме зависимости  $\rho = f(p)$  фактически уже заложены условия энергообмена потока идеального газа с внешней средой. А уравнение энергии типа (2.3) в таком случае (естественно, с отличной от 0 правой частью) дает количественную характеристику этого энергообмена. Мы же рассмотрели выше лишь адиабатические течения, которые, подчеркнем еще раз, для идеального газа возможны только с сохранением энтропии. Разумеется, справедливо и обратное утверждение.

### 3. Скорость звука

Скоростью звука называется скорость распространения слабых возмущений в упругой среде.

Пусть по бесконечно длинной трубе адиабатически движется идеальный газ, толкаемый поршнем со скоростью  $u$ . В какой-то момент времени скорость поршня увеличивают на весьма малую (в пределе на бесконечно малую) величину  $du$ , в результате чего по газу бежит слабая (в пределе бесконечно слабая) волна сжатия.

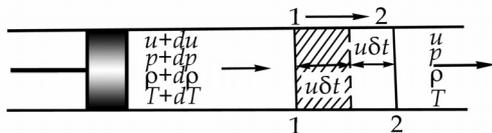


Рис. 3.1

Обозначим скорость ее движения относительно стенок через  $D$ , а скорость движения по расположенному перед ней газу через  $a$ . Тогда  $a$  и есть скорость звука. Очевидно,  $D = u + a$ .

Возьмем два близких момента времени:  $t$  и  $t + \delta t$ . Пусть в момент  $t$  волна занимает положение 1-1, а при  $t + \delta t$  — положение

2-2 (см. рис.3.1). Расстояние между этими сечениями равно  $D\delta t$ . Возьмем жидкую частицу, задний фронт которой в момент  $t$  совпадает с фронтом волны и находится в сечении 1-1, а передний фронт находится на расстоянии  $a\delta t = (D-u)\delta t$  вниз по потоку от сечения 1-1. Тогда через промежуток  $\delta t$  передний фронт пройдет расстояние  $u\delta t$  и займет положение 2-2. Задний фронт при этом продвинется на расстояние  $(u+du)\delta t$ . Таким образом, в момент  $t$  частица расположена полностью справа от волны, а при  $t+dt$  - полностью слева от нее.

Составим уравнения, описывающие движение выделенной частицы.

Уравнение сохранения массы:

$$\rho(D-u)\delta t = (\rho+dp)(D-u-du)\delta t.$$

Пренебрегая произведением  $dp \cdot du$ , имеем

$$(D-u)dp = adp = \rho du. \quad (3.1)$$

Уравнение импульсов:

$$\rho(D-u)\delta t[(u+du)-u] = [(p+dp)-p]\delta t,$$

откуда

$$\rho(D-u)du = \rho adu = dp. \quad (3.2)$$

Уравнение энергии:

$$\rho(D-u)\delta t(udu+de) = (p+dp)(u+du)\delta t = pu\delta t.$$

Сокращая на  $\delta t$  и пренебрегая произведением  $dpdu$ , получим

$$\rho(D-u)(udu+de) = d(pu). \quad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.2) находим скорость звука в газе

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (3.4)$$

Остается выяснить, каким образом брать производную в формуле (3.4). С этой целью перейдем из неподвижной системы координат, в которой приведена система уравнений (3.1), (3.3), в другую инерциальную систему, связанную с фронтом волны. В ней движение газа будет стационарным. Можно убедиться, что после простейших преобразований получится вновь система (2.1), (2.3) при  $A = \text{const}$ , описывающая изэнтропическое течение, т.е. переход

через слабую волну является изоэнтропическим, и, значит, производную  $\frac{dp}{d\rho}$  следует брать вдоль изоэнтропы (2.8). Таким образом:

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT}. \quad (3.5)$$

Для воздуха, в частности,  $a\left(\frac{M}{c}\right) = 20.1\sqrt{T}$ .

#### 4. Числа $M$ и $\lambda$ . Безразмерная форма уравнения энергии. Газодинамические функции $\tau$ , $\varepsilon$ , $\pi$

Интегральное уравнение энергии (1.9) или (2.7) и его правая часть могут быть представлены в нескольких эквивалентных формах благодаря введению скорости звука (3.5). Вместо

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

теперь можно записать

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{a_0^2}{\kappa - 1}, \quad (4.1)$$

$a_0$  - скорость звука в адиабатически заторможенном газе или в соуде, из которого вытекает газ.  $a_0$  связана с максимальной скоростью течения  $u_{max}$ :

$$\frac{a_0^2}{\kappa - 1} = \frac{u_{max}^2}{2}.$$

Представляет интерес еще одна характерная скорость. Предположим, что поток вытекает из резервуара со скоростью  $u$  малой, в то время как скорость звука  $a$  большая и далее течет по каналу, постепенно увеличивая свою скорость. Так как  $u$  растет, то температура  $T$  падает, и скорость звука  $a$  убывает. В каком-то сечении потока скорость газа станет равна местной скорости звука. Это сечение  $A_*$  называют критическим, скорость звука в нем (равную скорости газа) называют критической скоростью звука (обозначим ее  $a_*$ ), критическими называются и параметры газа в этом сечении

$p_*$ ,  $\rho_*$ ,  $T_*$ . Тогда уравнение (4.1) можно записать с правой частью в следующей форме:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} a_*^2. \quad (4.2)$$

Мы ввели, таким образом, три характерные скорости. Все они являются функциями только начальной энтальпии и связаны соотношениями:

$$\frac{u_{max}^2}{2} = \frac{a_0^2}{\kappa - 1} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} a_*^2 = c_p T_0. \quad (4.3)$$

Для воздуха  $\left( \kappa = 1.4; R = 287 \frac{Дж}{кг \cdot К} \right)$   $a_0 = 20.1 \sqrt{T_0}$ ;  $a_* = 0.913 a_0$ ;  
 $a_0 = 1.095 a_*$ ;  $u_{max} = 2.236 a_0 = 2.449 a_*$ .

Поделим в (4.1) все члены уравнения на  $\frac{a^2}{\kappa - 1}$ :

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left( \frac{u}{a} \right)^2 = \left( \frac{a_0}{a} \right)^2. \quad (4.4)$$

Отношение  $\frac{u}{a} = M$  называется числом Маха потока и является важнейшим критерием подобия, характеризующим сжимаемость среды. При малых числах  $M$ , точнее при скоростях газа, малых по сравнению со скоростью звука, сжимаемость можно не учитывать и рассматривать движение газа как течение несжимаемой жидкости. При скоростях среды, сопоставимых со скоростью звука или ее превосходящих, сжимаемость существенна, и течение среды должно подчиняться уравнениям, учитывающим фактор сжимаемости.

Толкование числа  $M$  как критерия сжимаемости может быть сделано также на основании энергетических соображений. В самом деле, величина  $M^2$  пропорциональна отношению кинетической энергии газа к его энтальпии. Поскольку при течении газа происходит преобразование (превращение) кинетической энергии в энтальпию и обратно, то при малых  $M$ , когда доля кинетической энергии в полной энергии потока относительно невелика, ее переход в энтальпию мало изменяет последнюю, т.е. газ ведет себя практически как несжимаемая жидкость. При  $M \gtrsim 1$  кинетическая энергия потока, по крайней мере, соизмерима с его энтальпией, и

изменения кинетической энергии приводят к существенным изменениям энтальпии, т.е. сильному проявлению эффектов сжимаемости.

Число  $M$  меняется от 0 (когда  $u = 0$  и  $a = a_0$ ) до  $\infty$  (при  $u = u_{max}$  и  $a = 0$ ). Последнее обстоятельство иногда вызывает определенные затруднения, например, при составлении газодинамических таблиц, вернее, при их замыкании; при изображении результатов в плоскости годографа и т.д. Часто более удобным бывает относить скорость  $u$  не к местной скорости звука, а к одной из трех характерных скоростей  $a_*$ ,  $a_0$  или  $u_{max}$ , которые постоянны во всем потоке. Из них в качестве масштаба скорости чаще всего принимают критическую скорость, а безразмерный параметр  $\lambda = \frac{u}{a_*}$

называют коэффициентом скорости. Очевидно, что всякий раз, когда  $M < 1$ , то и  $\lambda < 1$ , и когда  $M > 1$ , то и  $\lambda > 1$ .

Связь между  $M$  и  $\lambda$  находится из уравнения энергии (4.2) делением всех членов на  $\frac{u^2}{2}$ , что после преобразований дает

$$\lambda^2 = \frac{\frac{\kappa+1}{2} M^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2}. \quad (4.5)$$

В отличие от  $M$  число  $\lambda$  может меняться только в конечных пределах. Из (4.5) мы видим, что

$$0 \leq \lambda \leq \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}.$$

Так, для двухатомных газов, в том числе и для воздуха,  $\lambda$  не может превзойти  $\lambda_{max} = \sqrt{6} = 2.45$ .

Используя тот факт, что  $a^2 \sim T$  и связь (4.5) безразмерное уравнение энергии (4.4), можно записать в виде

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{-1} = 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2. \quad (4.6)$$

Если течение в канале изэнтропично, то на основании уравнения адиабаты Пуассона (2.8):

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\kappa - 1}} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}; \quad (4.7)$$

$$\pi = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (4.8)$$

Мы получили, таким образом, уравнения, связывающие изменение температуры, плотности и давления в канале с изменением числа Маха и коэффициента скорости.

$T_0$  в (4.6) - температура адиабатического торможения, а  $\rho_0$  в (4.7) и  $p_0$  в (4.8) - соответственно плотность и давление изэнтропического торможения;  $p_0$  называют часто также полным давлением.

Понятие температуры и давления торможения (плотность торможения - малоупотребительное понятие) широко применяют и тогда, когда течение не является изэнтропическим и (или) адиабатическим, понимая под этим "местные" значения параметров торможения, которые определяются расчетом из (4.6)-(4.8) по местным значениям  $T, \rho, p, M$ , (или  $\lambda$ ), т.е. это такие значения  $T, \rho, p$ , которые получились бы, если бы начиная с данного сечения поток был полностью заторможен с соблюдением условий, отвечающих соотношениям (4.6)-(4.8).

Установим связь критических параметров с параметрами торможения. Критическим параметрам соответствует число  $M = \lambda = 1$ . Поэтому из (4.6)-(4.8) вытекает:

$$T_* = \frac{2}{\kappa + 1} T_0; \quad \rho_* = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \rho_0; \quad p_* = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} p_0; \quad (4.9)$$

$$a_* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} R T_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} a_0.$$

При  $\kappa = 1.4$  имеем

$$T_* = 0.831 T_0; \quad \rho_* = 0.636 \rho_0; \quad p_* = 0.528 p_0; \quad a_* = 18.3 \sqrt{T_0} \left(\frac{M}{c}\right).$$

Отношения  $\frac{T}{T_0}$ ,  $\frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\frac{p}{p_0}$  столь часто требуются при газо-

динамических расчетах, что зависимости  $\tau = \frac{T}{T_0}$ ,  $\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\pi = \frac{p}{p_0}$

заранее рассчитаны для разных газов (разных показателей адиабаты  $\kappa$ ) и сведены в специальные (газодинамические) таблицы. Газодинамические

функции  $\tau$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$ ,

очевидно, взаимосвязаны, и связь между ними обусловлена уравнением состояния  $\pi = \varepsilon\tau$ .

Характер изменения  $\tau$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$  в зависимости от коэффициента скорости  $\lambda$  показан на рис.

4.1.

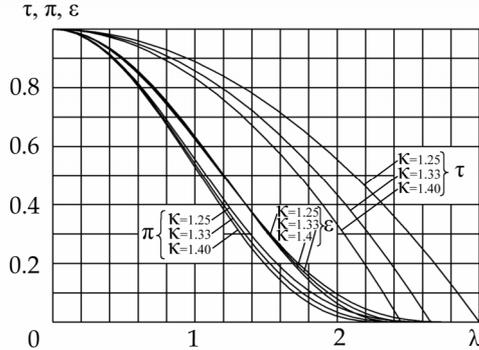


Рис. 4.1

## 5. Разгон потока. Функция $q$

Поставим задачу: какую форму необходимо придать каналу, чтобы обеспечить в нем непрерывное увеличение скорости потока  $\frac{du}{u} > 0$ . Из исходной системы дифференциальных уравнений сохранения для calorически совершенного газа (2.1), (2.2), (1.6) и уравнения состояния после ряда несложных выкладок получим соотношение

$$(M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A},$$

позволяющее составить качественное представление о характере изменения поперечного сечения канала с непрерывным увеличением скорости: при ускорении дозвукового потока площадь сечения уменьшается, становится минимальной при достижении скорости звука и растет по мере увеличения скорости в сверхзвуковой области.

ти. Очевидно, наименьшее сечение здесь является критическим в том смысле, как оно введено в разд.4.

Канал, состоящий из суживающейся и расширяющейся частей, предназначенный для создания сверхзвукового потока, получил название сопла Лавалья (по имени шведского инженера и изобретателя, который впервые в 1889 году применил такие сопла в построенной им паровой турбине).

Определим теперь, какому количественному закону подчиняется геометрия сопла Лавалья для получения на его выходе заданного числа  $M > 1$ . С этой целью воспользуемся условием постоянства расхода, в котором в качестве одного из сечений взято критическое сечение

$$\rho u A = \rho_* u_* A_*.$$

Отсюда находим

$$q = \frac{\rho u}{\rho_* u_*} = \left( \frac{A}{A_*} \right)^{-1}.$$

Функция  $q$ , называемая приведенным расходом, наряду с введенными ранее функциями  $\tau$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$ , играет важную роль в практических газодинамических расчетах. Выразим ее через  $M$  и  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} q &= \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{\rho_0}{\rho_*} \right) \frac{u}{a} \left( \frac{a}{a_0} \right) \left( \frac{a_0}{a_*} \right) = (\text{см. (4.6), (4.7) и (4.9)}) \\ &= \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} M \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$q = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{\rho_0}{\rho_*} \right) \left( \frac{u}{a_*} \right) = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \lambda \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (5.2)$$

Приведенный секундный расход выражается также через отношение давлений  $\pi$ :

$$q = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \sqrt{\pi^{\frac{2}{\kappa}} - \pi^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}}}. \quad (5.3)$$

Подчеркнем, что соотношения (5.1)-(5.3) справедливы при отсутствии тепловых и гидравлических потерь, т.е. при изоэнтропическом изменении состояния газа.

Графики функций  $q(\lambda)$  и  $[q(M)]^{-1} = \frac{A}{A_*}$  изображены на рис. 5.1 и 5.2.

Если принять  $\kappa = 1.4$ , то

$$\frac{A}{A_*} = \frac{(1 + 0.2M^2)^3}{1.728M}. \quad (5.4)$$

При увеличении  $\lambda$  от 0 до 1  $q(\lambda)$  растет от 0 до своего максимального значения  $q(\lambda) = 1$ , а затем при дальнейшем росте  $\lambda$  вновь уменьшается до 0, когда  $\lambda = \lambda_{max}$ . Таким образом, приведенный расход максимален и равен 1 при  $\lambda = 1$  и снижается как с уменьшением, так и с увеличением скорости по сравнению с критическим значением. Одно и то же значение функции  $q(\lambda) \neq 1$  соответствует двум значениям скорости газа, одно из которых является дозвуковым, а второе - сверхзвуковым. Правильное значение определяется в соответствии с условиями конкретной задачи.

Что касается функции  $[q(\lambda)]^{-1} = \frac{A}{A_*}$ , то ее поведение как

раз и говорит о том, как должно меняться поперечное сечение сопла, чтобы поток в нем можно было изоэнтропически разогнать до требуемой сверхзвуковой скорости. Из (5.4) и рис. 5.2 видно, до какой степени сопло необходимо сужать на дозвуковом и расширять на сверхзвуковом участке. При  $M = \lambda = 1$  сечение сопла ми-

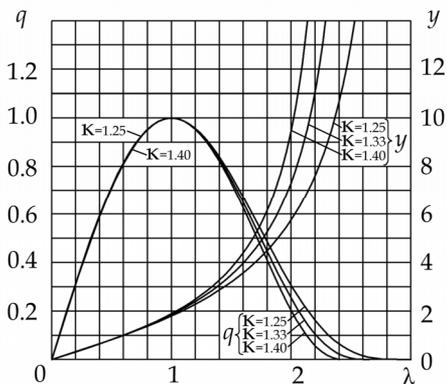


Рис. 5.1

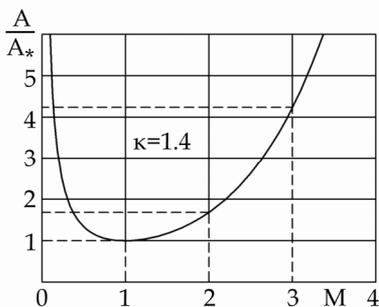


Рис. 5.2

желаемого нами числа  $M > 1$ , то никаким перепадом давления мы не добьемся его получения. Иная ситуация в случае дозвукового сопла.

Если сопло только сужается, то поток в нем, ускоряясь, остается везде дозвуковым, кроме, может быть, выходного сечения. Пока же поток в сопле всюду дозвуковой, давление на срезе сопла совпадает с давлением окружающей среды  $p_a = p_\infty$ : возникшая по какой-либо причине разница в давлениях быстро исчезнет под действием образующихся звуковых волн, которые распространяясь в дозвуковом потоке со скоростью звука, проникают внутрь сопла и перестраивают в нем течение так, что давление на выходе сравнивается с давлением внешней среды (при этом, конечно, исчезают и сами волны). Число  $M$  (или  $\lambda$ ) для такого сопла поэтому не зависит от размера его выходного сечения, а определяется только пере-

нимально,  $A = A_*$ .<sup>1)</sup> Важно подчеркнуть, что для реализации течения с заданным числом  $M > 1$  необходимым условием является создание канала, у которого совершенно определенным образом соотносятся площади наименьшего и выходного сечений. Другими словами, если сопло не удовлетворяет выведенному соотношению площадей для

<sup>1)</sup> Хотя сделанные нами выводы относительно формы сверхзвукового сопла получены на основе одномерной теории, они не только качественно справедливы, но и неплохо оправдываются количественно также и при рассмотрении задачи в неоднородной (плоской или осесимметричной) постановке. Правда, наиболее узкое сечение сопла критическим, в строгом смысле слова, здесь уже не является. Переход через скорость звука происходит вблизи минимального сечения (благодаря чему и мало отклонение параметров потока в нем от критических) по некоторой, как правило, изогнутой поверхности.

падом давления, точнее значением функции  $\pi_a = \frac{p_a}{p_0} = \frac{p_\infty}{p_0}$ , причем

$$p_\infty > p_* = \left[ \frac{2}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} p_0. \text{ Когда } p_\infty \text{ становится равным } p_*, \text{ скорость}$$

газа на срезе сужающегося сопла достигает скорости звука и остаётся таковой при дальнейшем снижении  $p_\infty$  (давление  $p_0$  полагаем постоянным). Начиная с этого момента,  $p_a = p_* = \text{const}$  и перестает зависеть от  $p_\infty < p_*$ , так как звуковые волны извне, несущие "информацию" о давлении окружающего пространства, теперь не могут проникнуть внутрь сопла. Следовательно, течение внутри сопла также перестает меняться. При этом говорят, что сопло запирается.

В отличие от дозвукового сопла для сверхзвукового сопла с целью получения на выходе заданного числа  $M_a$  (или  $\lambda_a$ )  $> 1$  следует, как выше отмечено, соответствующим образом подобрать площадь выходного сечения, а именно, определить ее по значению функции  $q^{-1}$  (в частности, при  $\kappa = 1.4$  рассчитать по формуле (5.4)). Но это только необходимое условие. Кроме того, надо иметь достаточный запас давления в камере перед соплом. Иначе говоря, для достижения, требуемого числа  $M_a > 1$  на срезе сопла (помимо предварительно правильно определенного выходного сечения) давление в форкамере  $p_0$  должно в известное число раз превосходить давление в окружающей среде. Это давление легко считается. Так как  $M_a > 1$ , то давление на срезе сверхзвукового сопла  $p_a$  не связано с давлением атмосферы  $p_\infty$  и равно

$$p_a = p_0 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = p_0 \pi(M a). \quad (5.5)$$

Ясно, что  $M_a = \text{const} > 1$ , когда  $\frac{p_a}{p_\infty} \geq 1$ . Поток из сопла по-

падает в пространство с более низким давлением и на некотором участке за срезом сопла продолжает расширяться и, значит разгоняться. Течение внутри сопла изэнтропично.

Более сложным будет вариант  $\frac{p_a}{p_\infty} < 1$ . При убывании отношения  $\frac{p_a}{p_\infty}$  от 1 до некоторого предельного значения  $\left(\frac{p_a}{p_\infty}\right)_{np}$  и соответствующего ему согласно (5.5) отношения  $\frac{p_0}{p_\infty}$  от  $\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_a^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$  до  $\left(\frac{p_a}{p_\infty}\right)_{np} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_a^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$  течение в канале сопла остается изэнтропичным при  $M_a = \text{const} > 1$ . Уменьшение  $\frac{p_a}{p_\infty}$  ниже  $\left(\frac{p_a}{p_\infty}\right)_{np}$  и соответственно уменьшение  $\frac{p_0}{p_\infty}$  ниже  $\left(\frac{p_a}{p_\infty}\right)_{np} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_a^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$  приводит к нарушению изэнтропичности

течения в сопле и появлению дозвуковой скорости на выходе. Момент исчезновения сверхзвукового истечения и перехода его в дозвуковое строго определить достаточно сложно. Очень грубо можно принять при этом, что в выходном сечении сопла находится прямой скачок уплотнения (его мы рассмотрим позже).

Надо заметить, что при существенном снижении  $p_0$  течение в сопле снова может стать изэнтропическим, но дозвуковым. Действительно, уменьшением  $p_0$  мы можем добиться такого положения, при котором поток в результате ускорения на сужающемся участке достигает в минимальном сечении звуковой скорости, (значит,  $A_{min} = A_*$ ) и далее снова тормозится в расширяющейся части сопла. В силу этого давление его в плоскости среза  $p_a$  будет равно  $p_\infty$ , число  $M_a < 1$  определится по значению функции  $q$  в дозвуковой области, а соответствующее предельное полное давление  $p_{0\text{ пр. дозв.}}$  найдется из (5.5). При  $p_0 < p_{0\text{ пр. дозв.}}$  газ течет по соплу везде с дозвуковой скоростью. Анализ этого случая не отличается от вышеприведенного для сужающегося сопла на докритическом режиме истечения.

## 6. Формулы расхода. Функция $y$

Выведем расчетные формулы для секундного массового расхода газа в канале  $\dot{m}$ . Воспользуемся для этого функцией  $q$ . Имеем

$$\dot{m} = \rho u A = \rho_* a_* \left( \frac{\rho u}{\rho_* a_*} \right) A = \rho_* a_* q A.$$

Переходя с помощью (4.9) и уравнения состояния от  $\rho_*$  и  $a_*$  к  $p_0$  и  $T_0$ , получим

$$\dot{m} = B_m \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} A q, \quad (6.1)$$

где размерный коэффициент  $B_m$  имеет вид

$$B_m = \sqrt{\frac{\kappa}{R} \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}.$$

Для воздуха  $\kappa = 1.4$ ,  $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ , поэтому в системе СИ

$$B_m = 0.0405.$$

При подсчете расхода через сверхзвуковое сопло удобнее всего брать в (6.1) не выходное (или произвольное) сечение сопла, а критическое сечение, так как тогда можно обойтись без газодинамических таблиц (или без расчета функции  $q$ ):

$$\dot{m} = B_m \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} A_*.$$

Формула (6.1) годится и для дозвукового сопла (когда  $p_a = p_\infty > p_*$ ), но при этом  $q(\lambda_a)$  надо вычислять по (5.3) либо, найдя  $\pi(\lambda_a) = \frac{p_\infty}{p_0}$ , взять из таблиц соответствующее ему значение  $q(\lambda_a)$  для подстановки в (6.1).

При решении ряда задач требуется связать расход газа не с полным, а со статическим давлением в потоке. Имея это в виду, получим

$$\dot{m} = B_m \frac{p}{\sqrt{T_0}} \frac{q}{\pi} A = B_m \frac{p}{\sqrt{T_0}} y A. \quad (6.2)$$

В (6.2) газодинамическая функция  $y$  имеет вид

$$y = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \lambda \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2\right)^{-1} = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} M \sqrt{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2}. \quad (6.3)$$

График  $y(\lambda)$  приводится на рис.5.1. В отличие от функции  $q(\lambda)$  зависимость между  $y(\lambda)$  и  $\lambda$  или  $y(M)$  и  $M$  взаимно однозначная.

В приложении к домашнему заданию №2 по курсу "Введение в механику сплошных сред" имеются газодинамические таблицы, содержащие введенные функции. Из них первые три даны в иных, Впрочем, не требующих пояснений обозначениях.

## 7. Сила реакции жидкости. Функция $z(\lambda)$

Пусть по изогнутой трубе течет установившийся поток сжимаемой жидкости, причем между стенками трубы и жидкостью может существовать трение. Поставим задачу: найти силу, с которой протекающая жидкость действует на стенки заданного отрезка канала (например, заключенного между сечениями 1–1 и 2–2, как показано на рис. 7.1).

Для нахождения величины этой силы - силы реакции жидкости - нет необходимости детально изучать течение в канале, а затем подсчитывать искомую силу путем интегрирования локальной нагрузки на стенки канала (давлений и касательных напряжений). Данную силу можно определить, применив уравнение импульсов к надлежащим образом выбранному жидкому объему (объему, состоящему из одних и тех же жидких частиц и вследствие этого имеющему постоянную массу), рассматривая его как механическую систему, или к контрольному объему (мысленно выделяемому постоянному объему, занимающему неизменное положение в пространстве, через который протекает жидкость). Согласно первому подходу изменение суммарного импульса жидкого объема равно импульсу равнодействующей внешних сил, приложенных к этому объему. В соответствии со вторым подходом (это т.н. первая теорема Эйлера) равнодействующая внешних сил, действующих в данный момент на жидкость в контрольном объеме, равна изменению за единицу времени суммарного импульса жидкости в этом объеме (частная производная по времени, если течение нестациона-

нарное) плюс разность потоков импульса жидкости на выходе из контрольного объема и на входе в него. Обоснование эквивалентности обоих подходов приводится, например, в [3,4]. Мы воспользуемся вторым подходом, поскольку он быстрее приводит к конечному результату. В качестве контрольного

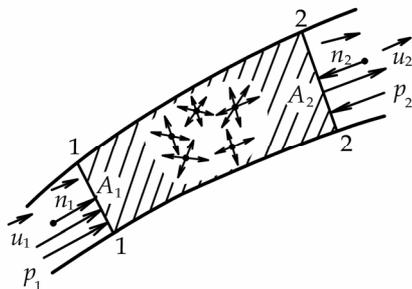


Рис. 7.1

объема возьмем объем жидкости между сечениями 1–1 и 2–2. Несколько усложним задачу и будем считать, что между сечениями 1–1 и 2–2 к потоку непрерывно подводится дополнительная масса жидкости с постоянным секундным расходом  $\dot{m}_{\text{дон}}$ , но с нулевой среднемассовой начальной скоростью и, значит, с нулевым начальным импульсом. Полагаем, что в сечении 2–2 смешение жидкостей уже завершилось и результирующий поток однороден. Введем в рассмотрение единичные внутренние нормали  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  к торцевым сечениям 1–1 и 2–2 соответственно. По первой теореме Эйлера тогда

$$\begin{aligned} p_1 \vec{n}_1 A_1 + p_2 \vec{n}_2 A_2 - \vec{R} &= -\rho_1 u_1 \vec{u}_1 A_1 + \rho_2 u_2 \vec{u}_2 A_2 = \\ &= -\rho_1 u_1^2 \vec{n}_1 A_1 - \rho_2 u_2^2 \vec{n}_2 A_2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь  $-\vec{R}$  - суммарная сила, с которой стенки канала на отрезке от сечения  $A_1$  до сечения  $A_2$  действуют на жидкость; по 3-му закону Ньютона с такой же силой, но противоположно направленной, жидкость действует на стенки канала на этом участке, т.е.  $\vec{R}$  - это и есть сила реакции жидкости, которую мы ищем. Из (7.1) имеем

$$\vec{R} = \vec{n}_1 (p_1 + \rho_1 u_1^2) A_1 + \vec{n}_2 (p_2 + \rho_2 u_2^2) A_2. \quad (7.2)$$

Величина  $J = pA + \rho u^2 A = pA + \dot{m}u$  называется полным импульсом струи. Следовательно:

$$\vec{R} = \vec{n}_1 J_1 + \vec{n}_2 J_2, \quad (7.3)$$

и мы получили чрезвычайно простое для запоминания выражение для силы реакции жидкости.

В случае газа (калорически совершенного)  $J$  можно переписать следующим образом:

$$J = Ap \left( 1 + \frac{\rho u^2}{p} \right) = A_* p_0 \frac{A}{A_*} \frac{p}{p_0} (1 + \kappa M^2) = A_* p_0 \frac{1 + \kappa M^2}{y(M)}. \quad (7.4)$$

Полный импульс можно также представить с помощью коэффициента скорости:

$$\begin{aligned} J &= pA + \dot{m}u = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* \left( \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{u}{a_*} + \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{pA}{\dot{m}_*} \right) = \\ &= \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* \left( \frac{2\kappa}{\kappa+1} \lambda + \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{\rho RTA}{\rho u A a_*} \right) = \\ &= \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* \left( \frac{2\kappa}{\kappa+1} \lambda + \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{a_* RT}{u a_*^2} \right) = \\ &= \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* \left( \frac{2\kappa}{\kappa+1} \lambda + \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{1}{\lambda} \frac{RT}{\frac{2\kappa}{\kappa+1} RT_0} \right) = \\ &= \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* \left[ \frac{2\kappa}{\kappa+1} \lambda + \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right) \right] = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Итак:

$$J = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \dot{m}_* z(\lambda). \quad (7.5)$$

Функция  $z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$  нам пригодится в дальнейшем.

Обозначим расход в сечении 1–1 (рис.7.1) через  $\dot{M}_1$ , а в сечении 2–2 через  $\dot{M}_2$ . Очевидно,  $\dot{M}_2 = \dot{M}_1 + \dot{m}_{\text{дон}}$ . В таком случае из (7.2) получаем

$$\vec{R} = \dot{M}_1 \left( u_2 \vec{n}_2 + u_1 \vec{n}_1 \right) + \dot{m}_{\text{дон}} u_2 \vec{n}_2 + p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2. \quad (7.6)$$

## 8. Определение тяги реактивного двигателя

Выражение для тяги реактивного двигателя с помощью (7.6) теперь несложно получить, имея в виду, что гондола двигателя (рис.8.1) обычно представляет собой осесимметричное тело, отчего  $-\bar{n}_1 = \bar{n}_2$ , а, значит,  $\bar{R} = R \cdot \bar{n}_2^{-1}$ , и, полагая, кроме того, это тело идеально удобообтекаемым (/3/ с.69), следовательно, не возмущающим внешнюю среду нигде, кроме области выхлопной струи. Для расчета тяги двигателя требуется учесть еще воздействие внешнего потока на корпус двигателя (формула (7.6) дает нам силу, приложенную изнутри).

Вследствие допущения об удобообтекаемости

$u_1 = u_\infty, p_1 = p_\infty$  и  $p_{бок} = p_{бок}$ . Сила, приложенная к корпусу двигателя со стороны внешнего потока, как следует из рис. 8.1, при

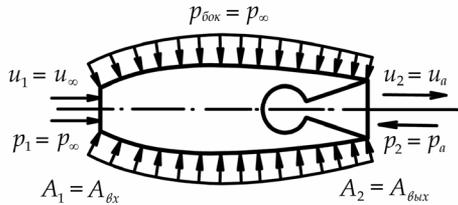


Рис. 8.1

$A_2 = A_{бвых} > A_1 = A_{бкx}$  направлена по потоку (по  $\bar{n}_1$ ) и равна  $R_{внешн} = p_\infty (A_{бкx} - A_{бвых})$ . Перепишем (7.6) применительно к решаемой задаче о двигателе, заменив  $\dot{M}_1$  просто на  $\dot{M}$ , а  $\dot{m}_{дон}$  на  $\dot{m}_{горючего}$ :

$$R = \dot{M}(u_a - u_\infty) + \dot{m}_{гор} u_a + p_a A_{бвых} - p_\infty A_{бкx}.$$

Сложив  $R$  с  $R_{внешн}$ , придем, наконец, к искомому соотношению для тяги реактивного двигателя:

$$T = R + R_{внешн} = \dot{M}(u_a - u_\infty) + \dot{m}_{гор} u_a + (p_a - p_\infty) A_{бвых}. \quad (8.1)$$

<sup>1)</sup> Поскольку речь идет о тяге, то целесообразно принять положительным направление внутренней нормали к выходному сечению двигателя  $A_2 = A_{бвых}$ .

В ракетных двигателях  $\dot{M} = 0$ , а  $\dot{m}_{\text{дон}} = \dot{m}_{\text{топлива}}$  (причем в случае ЖРД  $\dot{m}_{\text{мон}} = \dot{m}_{\text{гор}} + \dot{m}_{\text{ок}}$ ), поэтому для них

$$T = \dot{m}_{\text{мон}} u_a + (p_a - p_\infty) A_{\text{вых}}. \quad (8.2)$$

В космосе можно в последнем члене (8.2) пренебречь  $p_\infty$ , и тогда тяга ракетного двигателя оказывается равной полному импульсу выхлопной струи на срезе сопла двигателя:

$$T = J_a = \dot{m}_{\text{мон}} u_a + p_a A_{\text{вых}}. \quad (8.3)$$

### Список литературы

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. Ч.1. С.69-75.
2. Сергель О.С. Прикладная гидрогазодинамика: Учебник для авиационных вузов. М.: Машиностроение, 1981. С.60-65.
3. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. С.13-20, 27-33.