$$I_1/I_2 = \left(1-\exp(-\alpha x_1)\right) / \left(\exp(-\alpha x_1) - \exp(-\alpha x_2)\right).$$

Измерив отношение интенсивностей I_1/I_2, а также толщину пластины d и длину x_2, можно определить потери на распространение с точностью ~10%. В исследованном волноводе потери составляли ~1.5 дб/см.

Литература

[1] Божевольный С.И., Золотов Е.М., Черных В.А. – Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, с. 852.
[2] Золотов Е.М., Казанский П.Г., Черных В.А. – Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, с. 924.
[3] Yamanouchi K., Kamiya T., Shibayama K. – IEEE Trans. MTT-26, 1978, с. 289.
[4] Tangonan G.L., Barnoski M.K., Lotspeich J.F., Lee A. – Appl. Phys. Lett., 1977, v. 30, p. 238.

Институт общей физики
АН СССР, Москва

Поступило в Редакцию
30 августа 1983 г.

Письма в ЖТФ, том 9, вып. 23 12 декабря 1983 г.

УМЕНЬШЕНИЕ ЭНТРОПИИ В ПРОЦЕССЕ САМООРГАНИЗАЦИИ. S-ТЕОРЕМА (НА ПРИМЕРЕ ПЕРЕХОДА ЧЕРЕЗ ПОРОГ ГЕНЕРАЦИИ)

Ю.Л. Климонтович

Энтропия может быть определена через функцию распределения $f(X,t)$ (X – набор переменных, определяющих состояние системы) как для равновесного, так и неравновесного состояний выражением

$$S(t) = -k_Б \int \ln f(X,t) \cdot f(X,t)\, dX. \tag{1}$$

Эта функция обладает свойствами, дающими основание принять ее за меру неопределенности (меру неупорядоченности) при статистическом описании (см. например, §4 гл. 4 [1]).

Формула (1) определяет, в частности, энтропию равновесного состояния S_0, если подставить в нее каноническое распределение Гиббса f_0. Согласно теореме Гиббса (см. §5 гл. 4 в [1]),

$$S(t) \leqslant S_0, \tag{2}$$

если для произвольной функции $f(X,t)$ выполняются два условия:

$$\int f(X,t)dX=\int f_0(X)dX=1;\ \int H(X)f(X,t)dX=\int H(X)f_0(X)dX, \quad (3)$$

т.е. нормировка и средняя энергия сохраняются.

Функция $f(X,t)$ может удовлетворять уравнению, которое описывает эволюцию к равновесному состоянию. Примером служит уравнение Больцмана для разреженного газа. При этом для замкнутой системы справедлива Н–теорема Больцмана

$$\frac{dS}{dt}\geqslant 0. \quad (4)$$

Знак равенства в (2), (4) относится к равновесному состоянию. Для уравнения Больцмана второе условие (3) выполняется в силу свойства интеграла столкновений Больцмана $\int \vec{p}^2/2m I_Б\, d\vec{p}=0.$ Н–теорема для замкнутых систем справедлива и при использовании кинетических уравнений для многочастичных функций распределения [1, 2].

Таким образом, для замкнутых систем справедлива как Н–теорема Больцмана, так и теорема Гиббса. Если система открыта и в процессе эволюции устанавливается не равновесное, а стационарное неравновесное состояние, то Н–теорема становится несправедливой. Примерами могут служить различные уравнения, описывающие эволюцию при неравновесных фазовых переходах, в различных процессах самоорганизации [3, 4, 5, 1]. Если процесс эволюции в открытой системе описывается уравнением Фоккера–Планка, то можно сформулировать „Н–теорему" для „свободной энергии" неравновесного состояния [5, 1]. Это, однако, недостаточно для определения степени неупорядоченности различных состояний в открытой системе (см. ниже).

Для применимости теоремы Гиббса не требуется условие замкнутости системы. Достаточно, чтобы в процессе эволюции сохранялась средняя энергия. Однако при неравновесных фазовых переходах условие постоянства средней энергии, как правило, не выполняется. Кроме того, утверждение (2), выражающее теорему Гиббса, не гарантирует монотонность изменения энтропии в процессе эволюции.

Возможна и интересна другая постановка вопроса. Можно рассматривать не временную эволюцию при неравновесных фазовых переходах, а последовательность стационарных состояний при изменении управляющего параметра, например величины обратной связи в генераторе. Покажем, что по мере увеличения обратной связи, т.е. перехода через порог генерации в область развитой генерации, в процессе самоорганизации энтропия уменьшается. При этом значения энтропии во всех состояниях нормируются на одно и то же значение средней энергии. Будем называть этот результат S–теорема. Здесь буква S от английского слова *Selforganisation*. Можно допустить, что буква Н в названии „Н–теорема" происходит от английского слова *Heat* - тепло, поскольку в замкнутой системе устанавливается т е п л о в о е равновесие.

Рассмотрим классический генератор, подверженный действию δ коррелированного гауссовского шума с интенсивностью D. Уравнение Фоккера-Планка для функции распределения значений энергии колебаний имеет вид (см., например, §1 гл. 12 в [1])

$$\frac{\partial f(E,t)}{\partial t} = D\frac{\partial}{\partial E}\left(E\frac{\partial f}{\partial E}\right) + \frac{\partial}{\partial E}\left[(a+bE)Ef\right]. \qquad (5)$$

Стационарное решение может быть представлено в виде

$$f_0(E) = \exp\frac{F_0 - (aE + \frac{1}{2}bE^2)}{D}, \quad \int_0^\infty f_0(E)\frac{\gamma}{D_0}dE = 1; \qquad (6)$$

γ – коэффициент трения при нулевой обратной связи, b – параметр нелинейности. Порог генерации определяется условием $a=0$. В нормировочный интеграл введен масштабный множитель, чтобы сделать статистический интеграл безразмерным. Величину F_0 можно условно назвать „свободная энергия" для системы с эффективной функцией Гамильтона $H(E) = aE + \frac{1}{2}bE^2$. В силу постоянства интенсивности шума D можно определить и „свободную энергию" нестационарного состояния

$$F(t) = \langle H(E)\rangle - DS(t); \quad S(t) = -\int_0^\infty \ln f(E,t)\, f(E,t)\, dE \qquad (7)$$

и доказать соответствующую „Н-теорему" (§6 гл. 12 в 1) $dF/dt \leqslant 0$. Однако введенная таким искусственным приемом „свободная" энергия не может при произвольных параметрах системы служить мерой неупорядоченности. Вследствие этого обратимся к расчету энтропии. С помощью формул (7), (5) рассмотрим три наиболее интересных стационарных состояния.

1. Нулевая обратная связь ($a=0$), нелинейность мала (параметр $Db/\gamma^2 \ll 1$). При этих условиях энтропия и средняя энергия определяются формулами

$$S_{(1)} = \ln\frac{D}{D_0} + 1, \quad \langle E\rangle_{(1)} = \frac{D}{\gamma}. \qquad (9)$$

2. Порог генерации (a = 0). В этом случае

$$S_{(2)} = \ln\left(\sqrt{\frac{\pi D}{2b}}\frac{\gamma}{D_0}\right) + \frac{1}{2}, \quad \langle E\rangle_{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{D}{b}}. \qquad (10)$$

3. Развитая генерация: параметры $\varepsilon = D\,b/a^2 \ll 1$, $\varepsilon_\gamma = Db/\gamma|a| \ll 1$

$$S_{(3)}=\ln\left(\sqrt{\frac{2\pi D}{b}}\,\frac{\gamma}{D_0}\right)+\frac{1}{2}>S_{(2)}; \quad \langle E\rangle_{(3)}=\frac{|\alpha|}{b}. \qquad (11)$$

Итак, имеются выражения для энтропий трех стационарных состояний. Сравним $S_{(1)}$, $S_{(2)}$. Из формул (9), (10) следует, что

$$S_{(1)}-S_{(2)}=\ln\sqrt{\frac{2Db}{\pi\gamma^2}}<0, \qquad \text{т.к. параметр } Db/\gamma^2\ll 1. \qquad (12)$$

Таким образом, оказывается, что энтропия на пороге генерации больше, чем в состоянии „1", когда обратной связи нет. Отсюда, однако, нельзя сделать вывод о большей хаотичности состояния „2", т.к. сравнение энтропий $S_{(1)}$, $S_{(2)}$ производится при разных значениях средней энергии (см. (9), (10)). Для выявления относительной степени упорядоченности (или, напротив, неупорядоченности) выделенных стационарных состояний надо произвести перенормировку величин энтропии к одинаковым значениям средней энергии.

Возьмем за основу наиболее неравновесное состояние „3". Из условия равенства средних энергий найдем эффективные интенсивности шума для состояний „1", „2"

$$D_{„1"}=\gamma\frac{|\alpha|}{b}, \quad D_{„2"}=\frac{\pi}{2}\frac{|\alpha|^2}{b}. \qquad (13)$$

Проведем в формулах для $S_{(1)}$, $S_{(2)}$ замену $D\to D_{„1"}$, $D\to D_{„2"}$. После этого положим $D_0=D$. В результате перенормировки

$$S_{„1"}=\ln\left(\frac{\gamma|\alpha|}{Db}\right)+1; \quad S_{„2"}=\ln\left(\frac{\pi}{2}\frac{\gamma|\alpha|}{Db}\right)+\frac{1}{2}; \quad S_{„3"}=\ln\sqrt{\frac{2\pi\gamma^2}{Db}}+\frac{1}{2} \qquad (14)$$

и, следовательно, разности энтропий

$$S_{„1"}-S_{„2"}=\frac{1}{2}-\ln\frac{\pi}{2}>0; \quad S_{„2"}-S_{„3"}=\ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)>0. \qquad (15)$$

В результате приходим к неравенствам

$$S_{„1"}>S_{„2"}>S_{„3"} \qquad (16)$$

Они показывают, что по мере перехода от равновесного состояния „1" через порог генерации к режиму развитой генерации (при одинаковых значениях средней энергии) энтропия уменьшается. Тем самым на данном примере и доказывается S-теорема.

Такой же метод рассуждений можно использовать и при анализе степени упорядоченности состояний при других неравновесных фазовых переходах, например при переходе от ламинарного состояния к турбулентному.

Литература

[1] Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.

[2] Климонтович Ю.Л. – УФН, 1983, т. 139, с. 689.

[3] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

[4] Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.

[5] Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1979.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию 5 сентября 1983 г.

Письма в ЖТФ, том 9, вып. 23 12 декабря 1983 г.

ЭФФЕКТ ДОППЛЕРА ОТ ДОМЕНА ГАННА

В.Б. Сандомирский, А.В. Шеверев

При распространении домена Ганна в полупроводнике вследствие различных электрооптических эффектов показатели преломления света домена и области вне его должны различаться. Поэтому домен Ганна можно рассматривать как зеркало, движущееся со скоростью $V \geqslant 10^7$ см/с. Следовательно, свет, отраженный от такого зеркала, вследствие эффекта Допплера должен быть сдвинут по частоте относительно частоты падающего света. Ясно также, что из-за поглощения света в полупроводнике, процессов зарождения и исчезновения домена отраженный от домена свет, выходящий из образца, будет модулирован по интенсивности с частотой генерации диода Ганна.

Насколько нам известно, существование указанного эффекта не отмечалось для доменов Ганна [1].

Сделаем соответствующие оценки, ориентируясь на структуры на основе $GaAs$ или InP [1].

Коэффициент отражения от домена оценим, полагая домен однородным по толщине и имеющим резкие границы. Тогда для угла падения, близкого к нормальному, имеем [2].

$$R \simeq \frac{(\Delta n)^2 + (\Delta \varkappa)^2}{n^2}. \tag{1}$$

Здесь Δn и $\Delta \varkappa$ – изменения действительной и мнимой частей показателя преломления в домене вследствие электрооптического эффекта, n – показатель преломления полупроводника. Отметим,