

Санкт-Петербургский государственный технический университет
Институт инноватики

Лабораторная работа №4

ИССЛЕДОВАНИЕ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Составители:
Рыкин О.Р.,
Чечурин Л.С.

Санкт-Петербург
2002

ВВЕДЕНИЕ

В классической линейной теории при выводе дифференциальных уравнений, а также при переходе к анализу систем управления на языке передаточных функций, считается, что параметры, описывающие систему, не изменяются со временем (стационарны). Например, при составлении "классического" дифференциального уравнения маятника принималось, что его масса и длина постоянны. Естественно, это предположение является некоторой идеализацией, так как **нет такого физического объекта**, который не был бы подвластен времени. Это медленные изменения параметров (дрейф) под действием, например, старения, обычно мало заметно на гораздо более коротких временах интересующих нас движений системы, и потому им пренебрегают. Однако, в некоторых физических системах изменения этих параметров носят более, чем явный характер и совершаются со скоростями, сравнимыми со скоростями движения самой системы. Например, качели с раскачивающимся на них человеком можно рассматривать как обыкновенный маятник, но с меняющимся во времени параметром - его длиной.

Многочисленные наблюдения нештатной, неустойчивой работы системы, а зачастую просто катастрофических разрушений при определенной частоте и амплитуде изменения некоторого параметра системы привели к необходимости поиска объяснения этого явления и расчета условий его возникновения. Кроме того, умение рассчитывать условие параметрического резонанса позволило бы использовать его в благих целях. Исследования некоторых дифференциальных уравнений с периодически меняющимся параметром начались со второй половины XIX века (уравнения Матье и Хилла), с гораздо более общих позиций развивались А.М.Ляпуновым в пространстве времени, А.Н.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым в частотной области. Важность умения рассчитывать параметрические явления подчеркивает и тот факт, что к ним сводится анализ устойчивости периодических процессов и нелинейных систем управления.

Цели работы: расчет условий и численное исследование явления параметрического резонанса.

ПОСТАНОВКА ЛАБОРАТОРНОЙ ЗАДАЧИ

Широко распространенным приемом генерирования колебаний в электротехнике и радиотехнике служит электрический RLC контур с периодически изменяющейся емкостью, как показано на рис. 1.

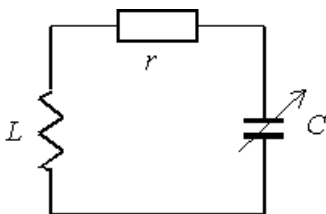


Рис. 1 RLC контур с переменной емкостью

Дифференциальное уравнение параметрического контура имеет вид

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2(1 + a \cos \Omega t)q = 0 \quad (1)$$

где q - заряд конденсатора, а коэффициенты уравнения связаны с параметрами контура соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= (LC)^{-1} \\ \alpha &= R/(2L) \end{aligned} \quad (2)$$

Технически несложно обеспечить изменение емкости по периодическому закону, например,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}(1 + a \cos \Omega t) \quad (3)$$

Лабораторная работа должна дать ответ на вопрос: **при какой амплитуде (амплитудах) a и частоте (частотах) Ω изменения параметра в системе возникают незатухающие периодические колебания?**

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРИЯ МЕТОДА

Для применения частотного критерия устойчивости необходимо перейти к представлению системы, похожему на то, которое использовалось для применения критерия Найквиста, см. рис. 2.

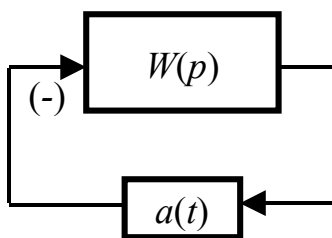


Рис. 2 Представление нестационарной системы как системы с обратной связью

14:54

Сделать это можно привычным способом: заменяя оператор дифференцирования на оператор Лапласа p . Тогда получаем

$$M(p) q(t) + N(p) [a(t) q(t)] = 0,$$

где

$$M(p) = p^2 + 2 \alpha p$$

$$N(p) = \omega_0^2$$

или

$$W(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\alpha p}, \quad (4)$$

$$a(t) = 1 + a \cos \Omega t.$$

Однако принципиальная особенность данной ситуации заключается в том, **что элемент $a(t)$ меняется со временем**, а значит его "передаточная функция" изменяется.

Ошибка, которая может стоить аварии, произойдет, если не считать данную задачу принципиально новой, ограничиваясь стандартной проверкой устойчивости для нескольких **фиксированных** значений параметра из заданного диапазона.

Для корректной замены нестационарного элемента на эквивалентную передаточную функцию необходимо провести процедуру **параметрической стационаризации**.

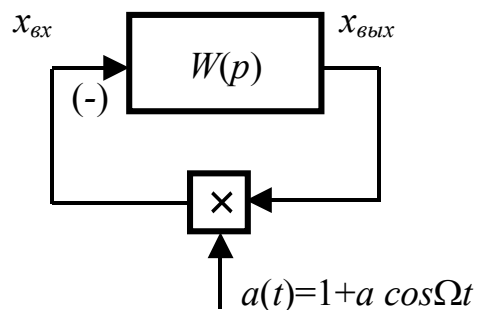


Рис. 3 Представление нестационарного элемента как модулятора

Сам метод подробно излагается в электронном курсе. Поясним лишь его суть. Принципиальной особенностью наличия в системе

14:54

нестационарного элемента будет то, что после прохождения через него сигнала $x_{вых}$, спектр качественно изменится. В колебаниях системы появятся новые частоты (при прохождении сигнала через элемент $W(p)$ этого не происходит!). Именно по этим частотам может нарушиться устойчивость замкнутой системы.

Разумеется, учесть ВСЕ (а их, вообще говоря, бесконечное количество) появившиеся частоты не представляется возможным. Однако этого и не требуется, поскольку обычно любой реальный линейный элемент $W(p)$ является фильтром высоких частот, его АЧХ с увеличением частоты падает. Это предположение называют **гипотезой фильтра**. Поэтому ограничиваются анализом устойчивости по нескольким первым гармоникам.

Можно показать, что периодичность изменения параметра приводит к возможности возбуждения на выходе системы периодических колебаний с частотой, **кратной частоте изменения параметра Ω** . Такие колебания называются **параметрическими**.

Параметрические колебания, имеющие наиболее значительную гармонику с частотой

$$k\Omega/2, k = 1, 2, \dots,$$

называются **параметрическими колебаниями k -го параметрического резонанса**.

Проведем анализ устойчивости по первой гармонике, т.е. выясним условия возбуждения первого параметрического резонанса, т.е. колебаний с частотой $\Omega/2$.

Пусть $a(t)$ изменяется гармонически с периодом T . Разложим сигнал $a(t)$ по частотам Ω (в ряд Фурье)

$$a(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a_r e^{+j\Omega r t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (5)$$

где коэффициенты a_r , как известно, находятся с помощью интегрирования:

$$a_r = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) e^{-j\Omega r t} dt \quad (6)$$

Это значит, что передаточная функция нестационарного элемента по гармоническому сигналу с номером r находится как

$$W_{ГС}^r(j\varphi) = a_0 - a_r e^{-j\varphi}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где φ – сдвиг по фазе между $x_{вых}$ и $a(t)$. Для определения передаточной функции по первой гармонике от полной суммы (5) остается лишь два слагаемых, т.е.

14:54

$$W_{ГС}^1(j\varphi) = W_{ГС}(j\varphi) = a_0 + a_1 e^{-j\varphi} \quad (8)$$

Тем самым мы пришли к привычной схеме, годной для применения критерия устойчивости Найквиста (см. рис. 4).

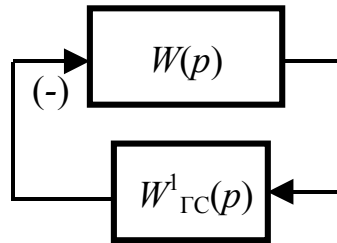


Рис. 4 Эквивалентная стационарная схема для определения условий первого параметрического резонанса

Теперь для суждения об устойчивости или неустойчивости замкнутой системы достаточно оценить поведение годографа разомкнутой системы $W_p(j\Omega) = W(j\Omega/2)W^1_{ГС}(j\varphi)$:

Первый параметрический резонанс возбуждается, если $1 + W(j\Omega/2)W^1_{ГС}(j\varphi) = 0$.

Это эквивалентно равенству

$$W(j\Omega/2)W^1_{ГС}(j\varphi) = -1$$

или

$$-[W(j\Omega/2)]^{-1} = W^1_{ГС}(j\varphi).$$

Годограф передаточной функции (8) при изменении φ выглядит на комплексной плоскости как окружность с центром в точке $(-a_0; 0)$ и радиусом $|a_1|$.

Итак, критерий возникновения в контуре колебаний первого параметрического резонанса формулируется следующим образом:

Если годограф $-[W(j\omega)]^{-1}$ пересекает окружность $W^1_{ГС}(j\varphi)$, то в системе возможно возникновение параметрических колебаний. Точки пересечения определяют границы частотного диапазона, в котором возникает соответствующий периодический режим (см. рис. 5).

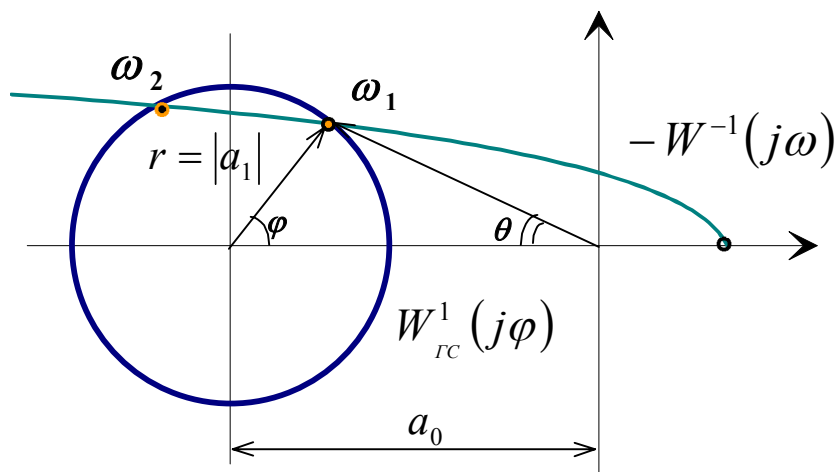


Рис. 5 К определению условий возбуждения первого параметрического резонанса

ПРОГРАММА РАБОТЫ

Часть I. Определение частот возбуждения первого резонанса

1. Изучение линейной части Построить в MATLABe годограф и АЧХ линейной части $W(j\omega)$ по формуле (4) для заданных значений параметров. Указать примерные границы частот, для которых применима гипотеза фильтра.

2. Стационаризация:

- а) для заданного закона изменения емкости провести **стационаризацию** по гармонике **первого параметрического резонанса**, т.е. аналитически интегрированием по формуле (6) найти коэффициенты a_0 и a_1 . Предъявить их преподавателю для контроля.
- б) построить в MATLABe годограф $W_{ГС}^1(j\varphi)$ стационаризованного по первой гармонике нестационарного элемента (7) с вычисленными a_0 и a_1 .

3. Графическое нахождение частот возбуждения Свести в одних осях (на одном графике) годографы - $[W(j\omega)]^{-1}$ и $W_{ГС}^1(j\varphi)$. Графически определить минимальную ω_{\min} и максимальную ω_{\max} частоты, на которых годограф - $[W(j\omega)]^{-1}$ находится внутри окружности $W_{ГС}^1(j\varphi)$, т.е. выполняется равенство (9).

- а) Определить минимальный радиус окружности a_1 , при котором годографы пересекаются. Вычислить по a_1 минимально допустимую амплитуду изменения параметра a_{\min} .
- б) Определить диапазон частот Ω изменения параметра, в котором возможно возбуждение первого параметрического резонанса, как $[2\omega_{\min}; 2\omega_{\max}]$.

Часть II. Эксперимент

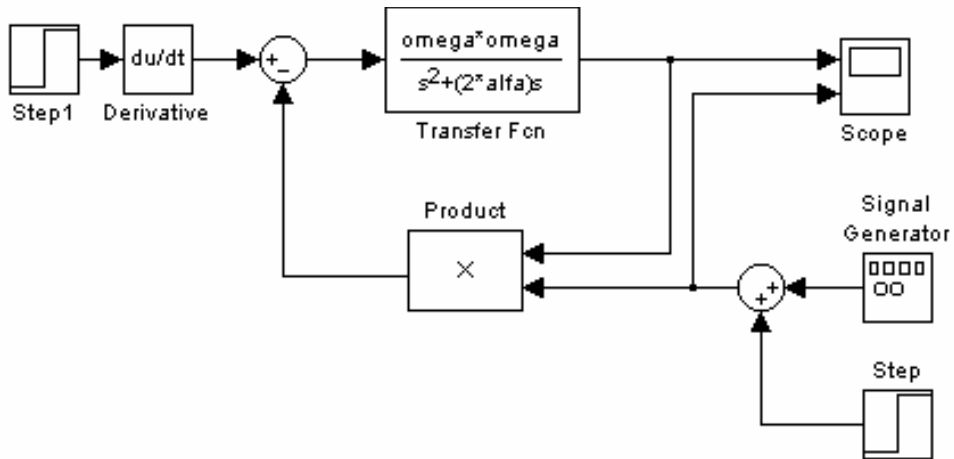


Рис. 6 Схема экспериментального стенда

Соберите схему экспериментальной установки, соответствующую рис. 6, в окне Simulink, в блоке передаточной функции задайте коэффициенты числителя и знаменателя стационарной передаточной функции.

а) На вход модулятора (в блоке генератора сигнала) подать сигнал с рассчитанной в I-3 амплитудой, превышающей a_{\min} , и любой частотой Ω , принадлежащей отрезку $\omega \in [2\omega_{\min}; 2\omega_{\max}]$. Запустить численный эксперимент, снять с осциллографа картину возбуждения первого параметрического резонанса.

б) Варьируя частоту и амплитуду изменения нестационарного элемента, проверить экспериментально точность теоретического нахождения границ возбуждения первого параметрического резонанса a_{\min} и $[2\omega_{\min}; 2\omega_{\max}]$.